

## 7.4 Décomposition en valeurs singulières

La diagonalisation orthogonale s'applique uniquement aux matrices symétriques (donc carrées). La décomposition en valeurs singulières (SVD, de l'anglais *Singular Value Decomposition*) étend cette idée à toutes les matrices, y compris les matrices rectangulaires. C'est l'une des factorisations les plus importantes en algèbre linéaire appliquée.

### 7.4.1 Valeurs singulières

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  (pas nécessairement carrée). Même si  $A$  n'est pas diagonalisable au sens usuel, nous pouvons considérer la matrice  $A^T A$  qui est :

- de taille  $n \times n$  (carrée),
- symétrique, car  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ .

D'après le théorème spectral,  $A^T A$  est diagonalisable en base orthonormée et admet  $n$  valeurs propres réelles.

#### Propriété 7.12

Les valeurs propres de  $A^T A$  sont toutes positives ou nulles.

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A^T A$  et  $\vec{v}$  un vecteur propre unitaire associé :  $A^T A \vec{v} = \lambda \vec{v}$  avec  $\|\vec{v}\| = 1$ .

Calculons  $\|A \vec{v}\|^2$  :

$$\|A \vec{v}\|^2 = (A \vec{v}) \cdot (A \vec{v}) = (A \vec{v})^T (A \vec{v}) = \vec{v}^T A^T A \vec{v} = \vec{v}^T (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{v}^T \vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2 = \lambda$$

Comme  $\|A \vec{v}\|^2 \geq 0$ , on a  $\lambda \geq 0$ . □

**Remarques 7.7.0.13.** Si  $\vec{v}$  est un vecteur propre unitaire de  $A^T A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors  $\|A \vec{v}\| = \sqrt{\lambda}$ . Cette quantité mesure « l'étirement » subi par  $\vec{v}$  sous l'action de  $A$ .

#### Définition 7.14

#### Valeurs singulières

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Les *valeurs singulières* de  $A$  sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^T A$ . On les note  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  et on les ordonne de façon décroissante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  sont les valeurs propres de  $A^T A$ , alors  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

**Remarques 7.7.0.15.** 1. Les valeurs singulières sont toujours réelles et non négatives.

2. Si  $\vec{v}_i$  est un vecteur propre unitaire de  $A^T A$  associé à  $\lambda_i$ , alors  $\sigma_i = \|A \vec{v}_i\|$ .

3. Le nombre de valeurs singulières non nulles est égal au rang de  $A$ , car  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T A)$  (théorème 6.56).

**Exemple.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ . Calculons les valeurs singulières de  $A$ .

**Étape 1 : Calculer  $A^T A$ .**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 & -1-4-4 \\ -1-4-4 & 1+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

**Étape 2 : Trouver les valeurs propres de  $A^T A$ .**

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 81 = \lambda^2 - 18\lambda = \lambda(\lambda - 18)$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 18$  et  $\lambda_2 = 0$ .

**Étape 3 : Calculer les valeurs singulières.**

$$\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{0} = 0$$

Le rang de  $A$  est donc égal à 1 (une seule valeur singulière non nulle).

**Exemple.** Soit  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Calculons les valeurs singulières de  $A$ .

**Étape 1 : Calculer  $A^T A$ .**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**Étape 2 : Trouver les valeurs propres de  $A^T A$ .**

Calculons le polynôme caractéristique en développant selon la troisième ligne :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_3) \\ &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 3[12 - 3(5-\lambda)] - 3[3(5-\lambda) - 12] + (2-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 16] \\ &= 3(3\lambda - 3) - 3(3 - 3\lambda) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) \\ &= 9(\lambda - 1) + 9(\lambda - 1) + (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 9) \\ &= 18(\lambda - 1) + (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 9) \\ &= (\lambda - 1)[18 + (2-\lambda)(\lambda - 9)] \\ &= (\lambda - 1)[18 - \lambda^2 + 11\lambda - 18] \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 11) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 11$ ,  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_3 = 0$ .

**Étape 3 : Calculer les valeurs singulières.**

$$\sigma_1 = \sqrt{11}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0$$

Le rang de  $A$  est égal à 2, car il y a exactement 2 valeurs singulières non nulles.

## 7.4.2 Théorème de décomposition en valeurs singulières

### Théorème 7.16

### Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  de rang  $r$ . Il existe :

- une matrice orthogonale  $U$  de taille  $m \times m$ ,
- une matrice orthogonale  $V$  de taille  $n \times n$ ,
- une matrice  $\Sigma$  de taille  $m \times n$  de la forme  $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  où  $D$  est une matrice diagonale  $r \times r$  contenant les valeurs singulières non nulles  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  sur sa diagonale,

telles que :

$$A = U\Sigma V^T$$

*Démonstration.* **Construction de  $V$  :** Comme  $A^T A$  est symétrique, le théorème spectral garantit l'existence d'une base orthonormée  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A^T A$ . On ordonne ces vecteurs de sorte que les valeurs propres associées  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  soient décroissantes. On pose  $V = [\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_n]$ .

**Valeurs singulières :** On pose  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Supposons que  $A$  a exactement  $r$  valeurs singulières non nulles :  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  et  $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ .

**Construction des premières colonnes de  $U$  :** Pour  $i = 1, \dots, r$ , on définit :

$$\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$$

Montrons que  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  est orthonormé. Pour  $i \neq j$  :

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \vec{u}_i^T \vec{u}_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (A\vec{v}_i)^T A\vec{v}_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \vec{v}_i^T \vec{v}_j = 0$$

car  $\vec{v}_i$  et  $\vec{v}_j$  sont orthogonaux.

Pour  $i = j$  :

$$\|\vec{u}_i\|^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} \vec{v}_i^T A^T A\vec{v}_i = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \|\vec{v}_i\|^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} \cdot 1 = 1$$

**Complétion de  $U$  :** On complète  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  en une base orthonormée  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  de  $\mathbb{R}^m$ , et on pose  $U = [\vec{u}_1 \ \dots \ \vec{u}_m]$ .

**Vérification :** Par construction,  $A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i$  pour  $i \leq r$ , et  $A\vec{v}_i = \vec{0}$  pour  $i > r$  (car  $\sigma_i = 0$ ).

Les colonnes de  $AV$  sont donc  $[\sigma_1 \vec{u}_1, \dots, \sigma_r \vec{u}_r, \vec{0}, \dots, \vec{0}]$ .

Or la  $j$ -ème colonne de  $U\Sigma$  est  $U$  multiplié par la  $j$ -ème colonne de  $\Sigma$ , c'est-à-dire  $\sigma_j \vec{u}_j$  si  $j \leq r$ , et  $\vec{0}$  sinon. Donc  $AV = U\Sigma$ .

Comme  $V$  est orthogonale, on a  $VV^T = I_n$ . En multipliant l'égalité  $AV = U\Sigma$  à droite par  $V^T$ , on obtient

$$A = AVV^T = U\Sigma V^T.$$

□

**Remarques 7.7.0.17.** 1. Les colonnes de  $V$  sont appelées vecteurs singuliers à droite de  $A$ . Ce sont les vecteurs propres unitaires de  $A^T A$ , ordonnés selon les valeurs propres décroissantes.

2. Les colonnes de  $U$  sont appelées vecteurs singuliers à gauche de  $A$ . Les  $r$  premières colonnes sont obtenues par  $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , et les colonnes restantes complètent une base orthonormée de  $\mathbb{R}^m$ .

3. La décomposition SVD n'est pas unique (les matrices  $U$  et  $V$  peuvent varier), mais la matrice  $\Sigma$  est unique (parce que l'on a ordonné les valeurs singulières).

4. Contrairement à la diagonalisation classique, la SVD existe pour toute matrice, qu'elle soit carrée ou rectangulaire.

5. L'ensemble  $\{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$  constitue une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$ . De plus,  $\text{rang}(A) = r$  (le nombre de valeurs singulières non nulles).

### 7.4.3 Méthode de calcul de la SVD

#### Méthode 7.18

#### Calcul de la décomposition SVD

Pour calculer la SVD  $A = U\Sigma V^T$  d'une matrice  $A$  de taille  $m \times n$  :

**Étape 1 : Diagonaliser  $A^T A$  en base orthonormée.**

- Calculer  $A^T A$  (matrice  $n \times n$  symétrique).
- Trouver les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  de  $A^T A$ .
- Pour chaque valeur propre, calculer une base orthonormée de l'espace propre associé.

**Étape 2 : Construire  $V$  et  $\Sigma$ .**

- Les colonnes de  $V$  sont les vecteurs propres unitaires  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  de  $A^T A$ , ordonnés selon les valeurs propres décroissantes.
- Les valeurs singulières sont  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ .
- Construire  $\Sigma$  de taille  $m \times n$  avec les  $\sigma_i$  non nuls sur la diagonale.

**Étape 3 : Construire  $U$ .**

- Pour chaque valeur singulière non nulle  $\sigma_i$ , calculer  $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$ .
- Les vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$  forment une famille orthonormée.
- Si  $r < m$ , compléter en une base orthonormée de  $\mathbb{R}^m$  en trouvant des vecteurs orthogonaux à  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$  (ce qui revient à trouver une base de  $\ker(A^T)$ ).

**Exemple.** Calculons la SVD de  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ .

**Étape 1 : Diagonalisation de  $A^T A$ .**

Nous avons calculé  $A^T A = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_1 = 18$  et  $\lambda_2 = 0$ .

$$\text{Pour } \lambda_1 = 18 : A^T A - 18\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'espace propre est  $E_{18} = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ . Le vecteur unitaire est  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

$$\text{Pour } \lambda_2 = 0 : A^T A - 0 \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'espace propre est  $E_0 = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ . Le vecteur unitaire est  $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Vérification de l'orthogonalité :  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) = 0$

**Étape 2 : Construction de  $V$  et  $\Sigma$ .**

$$V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières sont  $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  et  $\sigma_2 = 0$ .

Le rang de  $A$  est  $r = 1$ . La matrice  $\Sigma$  est de taille  $3 \times 2$  :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape 3 : Construction de  $U$ .**

Pour  $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$  :

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} A \vec{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Vérifions :  $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$

Comme  $r = 1$  et  $m = 3$ , il faut trouver deux vecteurs  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  orthogonaux à  $\vec{u}_1$  et entre eux.

Ces vecteurs doivent satisfaire  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u} = 0$ , soit  $x - 2y + 2z = 0$ .

Prenons deux solutions linéairement indépendantes, par exemple  $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Vérifions l'orthogonalité avec  $\vec{u}_1$  :  $\vec{u}_1 \cdot \vec{w}_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 = 0$   $\vec{u}_1 \cdot \vec{w}_2 = -\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 0$

Mais  $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -4 \neq 0$ , donc il faut orthogonaliser par Gram-Schmidt.

Posons  $\vec{u}_2' = \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\|\vec{u}_2'\| = \sqrt{5}$ .

$$\vec{u}_3' = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_2'}{\|\vec{u}_2'\|^2} \vec{u}_2' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Après normalisation :

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**Résultat final :**

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Et  $A = U\Sigma V^T$ .

**Remarque 7.7.0.19.** Dans la construction de la SVD, les premières colonnes de  $U$  sont imposées par les formules  $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$  pour les valeurs singulières non nulles. En revanche, les colonnes restantes ne sont pas uniques : dans les cas simples, on peut souvent les choisir « à la main » en prenant des vecteurs faciles à écrire, orthogonaux aux  $\vec{u}_i$  déjà trouvés (et entre eux), puis en les normalisant. Toute matrice orthogonale  $U$  obtenue de cette façon, avec les bonnes premières colonnes, donne une SVD valide de  $A$ . Dans l'exemple ci-dessus, après avoir fixé  $\vec{u}_1$  et un premier vecteur  $\vec{w}_1$  orthogonal à  $\vec{u}_1$ , il restait à trouver un troisième vecteur orthogonal aux deux premiers. Le procédé de Gram-Schmidt donne une méthode fiable et répliquable, mais cela peut parfois se faire plus rapidement par un choix judicieux.

**Remarque 7.7.0.20.** Considérons la transposée  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ , qui est une matrice  $2 \times 3$ .

Sa SVD est :

$$A^T = V\Sigma^T U^T$$

où  $U$ ,  $\Sigma$  et  $V$  sont les matrices calculées ci-dessus pour  $A$ . Explicitement :

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T$$

En général, si  $A = U\Sigma V^T$  est une SVD de  $A$ , alors  $A^T = V\Sigma^T U^T$  est une SVD de  $A^T$ . Les valeurs singulières sont les mêmes, mais les rôles des vecteurs singuliers à gauche et à droite sont échangés.

Toutefois, si l'on recalculait la SVD de  $A^T$  à la main, en repartant de  $(A^T)^T A^T = AA^T$ , on obtiendrait en général des matrices orthogonales différentes (signes, choix de complétions orthogonales).

**Exemple.** Calculons la SVD de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Étape 1 : Diagonalisation de  $A^T A$ .**

Nous avons calculé précédemment :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 11$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ .

Pour  $\lambda_1 = 11$  : on résout  $(A^T A - 11\mathbb{I}_3)\vec{v} = \vec{0}$ .

$$A^T A - 11\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne  $x_1 + x_2 = 3x_3$  et  $-10x_2 = -15x_3$ , donc  $x_2 = \frac{3}{2}x_3$  et  $x_1 = \frac{3}{2}x_3$ .

On prend  $x_3 = 2$  :  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Pour  $\lambda_2 = 1$  : on résout  $(A^T A - \mathbb{I}_3)\vec{v} = \vec{0}$ .

$$A^T A - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne  $x_1 = -x_2$  et  $x_3 = 0$ . On obtient  $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Pour  $\lambda_3 = 0$  : on résout  $A^T A \vec{v} = \vec{0}$ .

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne  $x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 0$  et  $x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0$ , donc  $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}x_3$ . En prenant par exemple  $x_3 = -3$ , on obtient un vecteur propre  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ , que l'on normalise en

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

**Étape 2 : Construction de  $V$  et  $\Sigma$ .**

$$V = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{2}{\sqrt{22}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières sont  $\sigma_1 = \sqrt{11}$ ,  $\sigma_2 = 1$ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape 3 : Construction de  $U$ .**

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} A \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{242}} \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = A \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme  $m = 2 = r$ , la matrice  $U$  est complète :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

**Résultat final :**

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

**Exemple.** Calculons la SVD de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Étape 1 : Calcul et diagonalisation de  $A^T A$ .**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique en développant selon la troisième colonne :

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(A^T A - \lambda \mathbb{I}_3) \\
 &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (9 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (9 - \lambda) [(5 - \lambda)^2 - 16] \\
 &= (9 - \lambda) [(5 - \lambda - 4)(5 - \lambda + 4)] \\
 &= (9 - \lambda)^2 (1 - \lambda)
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 9$  (multiplicité 2) et  $\lambda_2 = 1$  (multiplicité 1).

**Espaces propres :**

Pour  $\lambda = 9$  :

$$A^T A - 9\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système  $x_1 - x_2 = 0$  donne  $x_1 = x_2$ , avec  $x_2$  et  $x_3$  libres. Donc :

$$E_9 = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux. On les normalise :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour  $\lambda = 1$  :

$$A^T A - \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système donne  $x_1 = -x_2$  et  $x_3 = 0$ . Donc  $E_1 = \text{Vect} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ .

On normalise :  $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

**Étape 2 : Construction de  $V$  et  $\Sigma$ .**

Les valeurs singulières sont  $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$  et  $\sigma_3 = 1$ . Le rang est  $r = 3$ .

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Étape 3 : Construction de  $U$ .**Pour  $\sigma_1 = 3$  :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{3}A\vec{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour  $\sigma_2 = 3$  :

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{3}A\vec{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour  $\sigma_3 = 1$  :

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{1}A\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme  $r = 3 < m = 4$ , il faut compléter par un vecteur  $\vec{u}_4$  orthogonal à  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .On vérifie aisément que  $\vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  convient.**Résultat final :**

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Définition 7.21***Pseudo-inverse de Moore-Penrose*

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  de rang  $r$  avec la SVD réduite  $A = U_r D V_r^T$ , où  $D$  est la matrice diagonale  $r \times r$  des valeurs singulières non nulles. Le *pseudo-inverse* (ou *inverse de Moore-Penrose*) de  $A$  est la matrice  $n \times m$  définie par :

$$A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$$

**Remarques 7.7.0.22.** Si  $A$  est carrée et inversible, alors  $A^+ = A^{-1}$ . Le pseudo-inverse généralise la notion d'inverse aux matrices non inversibles et non carrées.

**Propriété 7.23***Solution au sens des moindres carrés*

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Le vecteur  $\hat{x} = A^+ \vec{b}$  est la solution au sens des moindres carrés de longueur minimale de l'équation  $A \vec{x} = \vec{b}$ .